**Topologie des espaces vectoriels normés**

**Exemples ⍟**

1. et sont deux ouverts de

En effet,

Et

1. Dans muni de , soient , alors sont des ouverts de

Soit ,

Montrons que est une partie ouverte de . Soit

Posons alors

Soit , alors

Donc

Donc , donc est ouvert.

**Exemples à propos des ouverts ⍟**

1. est un fermé de car est un ouvert de

E est un fermé de car est un ouvert de

1. Dans muni de , avec , et sont des fermés de .

En effet, est un ouvert de en tant qu’union d’ouverts de .

1. Dans est un fermé de . On va montrer que est un ouvert de .

Soit , posons , alors car .

Soit , montrons que

Supposons par l’absurde que ie

Alors Absurde.

Ainsi , d’où

Donc est un ouvert de

**Exemple :** ⍟

Soit un evn. Soit et . Montrons que est un fermé de .

Soit une suite d’éléments de qui converge vers (dans ).

, ie

Essayons de montrer que

On a

Ainsi . En faisant tendre vers dans la première inégalité, il vient :

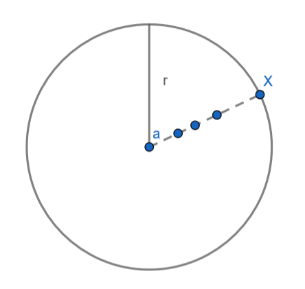
Ainsi par caractérisation séquentielle des fermés, est un fermé de .

De même, est un fermé de (même preuve en remplaçant les par .

Exemple : ⍟

Soient un evn, et .

On va montrer que

* On a vu que est un fermé contenant donc par la propriété 2.7,
* On a , or . Reste donc à montrer que

Soit on va construire une suite d’éléments de qui converge vers

Posons et

Alors

Ainsi

Enfin, , ie . Donc , ce qui amène à l’inclusion voulue.